Hölder の不等式

$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする．また，それぞれ p 乗，q 乗絶対可積分関数 $f(x), g(x)$ と $\alpha, \beta\ (-\infty \leqq \alpha < \beta \leqq \infty)$ に対して，$f(x)g(x)$ も絶対可積分で

$$\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|\,dx \leqq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ．

証明． まずは，Young の不等式を示す．

Young の不等式

$p, q > 1$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たすとする．このとき $a, b \geqq 0$ に対して

$$ab \leqq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

が成り立つ．

証明． $ab = 0$ のときは明らかなので $ab > 0$ の場合を示す．$h(t) = \dfrac{t^p}{p} - t + \dfrac{1}{q}\ (t \geqq 0)$ とする．このとき $h'(t) = t^{p-1} - 1$ であるから，$h(t)$ は $t = 1$ で最小値 $h(1) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 = 0$ となる．あとは $a, b > 0$ に対して $t = ab^{-\frac{q}{p}}\ (>0)$ とおいて整理すると Young の不等式が示される．■

示す不等式の右辺が 0 のときは $f(x), g(x)$ の少なくとも一方は関数として 0 なので不等式は成り立つ．よって右辺の積分値の積が 0 でない場合を示す．ここで，$A = \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$ とし，Young の不等式の a, b に $a = \dfrac{|f(x)|}{A}$, $b = \dfrac{|g(x)|}{B}$ を代入して積分をすると

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x)|}{A}\cdot\frac{|g(x)|}{B} &\leqq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{B^q} \\
\int_\alpha^\beta \frac{|f(x)|}{A}\cdot\frac{|g(x)|}{B}\,dx &\leqq \int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{B^q}\right)dx \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1
\end{aligned}$$

となり，整理すると

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|\,dx &\leqq AB \\
&= \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

となり，Hölder の不等式が示された．■